

Programme de colle n°21

semaine du 16 au 20 mars

Notions vues en cours

Chapitre 27 : Espaces vectoriels (suite)

- Sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs noté $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$, vu comme l'ensemble des CL (*combinaisons linéaires*) de $u_1, \dots, u_n$; si v est une CL de $u_1, \dots, u_n$ alors $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n, v) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$
- Sous-espace engendré par une partie X : définition, notation $\text{Vect}(X)$, c'est le plus petit s.e.v. qui contient X , si $A \subset B$ alors $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$, $\text{Vect}(X) = X$ ssi X est un s.e.v., $\text{Vect}(X)$ est l'ensemble des CL des vecteurs de X (avec un nombre fini de vecteurs pour chaque CL)
- Famille génératrice (finie), famille libre (finie), famille liée (finie), vecteurs colinéaires, caractérisation du caractère libre (ou liée) d'une famille ayant 1 ou 2 vecteurs, une famille de n vecteurs est liée ssi un vecteur est CL des autres
- Si une famille contient 0_E , elle est liée, si une famille contient plusieurs fois le même vecteur, elle est liée
- Base : définition, $(e_1, \dots, e_n)$ est une base ssi tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme une CL des vecteurs $e_1, \dots, e_n$, bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et de $\mathbb{K}_n[X]$
- Somme de deux s.e.v. : définition, notation $F + G$, c'est un s.e.v., $F + G = \text{Vect}(F \cup G)$, quelques propriétés simples de la somme ($F + F = F$, etc.)
- Somme directe de deux s.e.v. : définition, notation $F \oplus G$, cela équivaut à $F \cap G = \{0_E\}$
- S.e.v. supplémentaires dans un e.v. : définition, caractérisations
- Famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ presque nulle, notation $\mathbb{K}^{(I)}$, support d'une famille presque nulle
- Extension des notions vues pour des familles finies à des familles possiblement infinies $(e_i)_{i \in I}$: CL, s.e.v. engendré par les $(e_i)_{i \in I}$, famille génératrice, famille libre, base (tout ceci principalement avec $I \subset \mathbb{R}$)
- Vu en TD : méthode pour transformer un s.e.v. sous la forme d'une équation (par ex $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ et le mettre sous la forme d'un Vect et réciproquement

Chapitre 28 : Dimension d'un espace vectoriel

- Sous-famille et sur-famille ; partant d'une famille liée (resp. génératrice), toute sur-famille reste liée (resp. génératrice) ; partant d'une famille libre, toute sous-famille reste libre
- Une famille est dite finie si elle possède un nombre fini d'éléments, sinon elle est dite infinie, cardinal d'une famille finie, notation $\text{card}(\mathcal{F})$
- Dans un e.v. le cardinal de toute famille libre (finie) est inférieur ou égal à celui de toute famille génératrice (finie)
- Théorèmes de la base incomplète et de la base extraite, tout e.v. admet des bases

La notion de dimension d'un e.v. n'est pas au programme de cette semaine.

Les questions de cours sont en page suivante

Questions de cours

Question Flash. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examinateur, sur laquelle on doit passer un temps minimal. Cette question est choisie parmi celles ci-dessous, après les questions longues (chapitres **23, 24 et 27**).

Question Longue. *Sauf mention contraire, les démonstrations sont exigibles. Les énoncés des théorèmes doivent être clairement... énoncés !*

1. Sans démonstration : caractérisation de $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$, définitions de “ $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille génératrice / libre / liée / une base”, ainsi que la définition des coordonnées d'un vecteur selon une base. Chapitre 27, Théorème 27.11, Définitions 27.22, 27.24, 27.25, 27.31, Théorème 27.32
Inutile de réécrire chaque encadré en entier : la partie “mathématique” suffit. Par exemple $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de E si $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n) = E$.
2. La somme de deux s.e.v. est un s.e.v. Chapitre 27, Théorème 27.34
3. Définition de “ F et G sont en somme directe” et preuve d'une caractérisation. Donner enfin la définition de “ F et G sont supplémentaires” Chapitre 26, Définition 27.36, Théorème 27.37, Définition 27.38

Questions Flash au programme :

Chapitre 27 (on suppose que E est un $\mathbb{K}$ -e.v.) :

- Donner cinq $\mathbb{K}$ -e.v. usuels (rappel : la liste est $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^\Omega, \mathbb{K}[X], \mathbb{K}(X), \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$)
- Soit $F \subset E$. Donner une caractérisation de “ F est un s.e.v. de E ”.
- Donner la définition en termes d'ensemble de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$.
- Soit A une partie de E . Compléter : $\text{Vect}(A)$ est le plus de E qui A et $\text{Vect}(A) = A$ ssi
- Donner la définition de “ $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille génératrice de E ”.
- Donner la définition de “ $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille libre”. Comment appelle-t-on une famille qui n'est pas libre ?
- Donner la définition de “ $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille liée”.
- Donner la définition de “ u et v sont colinéaires”. Que peut-on alors en déduire sur la famille (u, v) ?
- Que signifie la notation $F \oplus G$? En donner une caractérisation simple en fonction de F et G .
- Que signifie “ F et G sont supplémentaires” ? En donner une caractérisation simple en fonction de F et G .

Chapitre 24 :

- Rappeler le théorème de d'Alembert-Gauss.
- Quels sont les polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}$? et sur $\mathbb{R}$?
- Donner la forme de la factorisation d'un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, en précisant le rôle de chaque variable
- Donner la forme de la factorisation d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, en précisant le rôle de chaque variable
- Qu'appelle-t-on un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$? et scindé à racines simples ?
- En termes de racines, donner une condition nécessaire et suffisante pour que $P \wedge Q = 1$
- Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ avec $a \neq 0$, dont on note α, β, γ les racines complexes. Donner les relations coefficients-racines.

- Quelle structure algébrique possède l'ensemble $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles ?
- Soit $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$. Que doit-on vérifier pour que F soit irréductible ?
- Soit $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$. Que vaut $\deg(F)$? Dans quel ensemble prend-il ses valeurs ?
- Quelle est la définition d'un pôle d'une fraction rationnelle $\frac{A}{B}$? et d'une racine ?
- Donner la forme de la DES sur $\mathbb{R}(X)$ ou sur $\mathbb{C}(X)$ pour une fraction rationnelle donnée par l'examineur (*le dénominateur étant déjà factorisé ou facile à factoriser, et la division euclidienne n'étant pas nécessaire*).

Chapitre 23 :

- Rappeler la définition de “ P et Q sont associés”
- Si $B \mid A$ dans quel cas peut-on dire que $\deg B \leq \deg A$? Que peut-on dire de plus si $\deg B = \deg A$?
- Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Si $A \mid B$ et $B \mid A$, que peut-on dire ?
- Énoncer le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$
- Rappeler la relation de Bézout (ou théorème de Bézout-Bachet) pour des polynômes
- Rappeler le théorème de Bézout pour des polynômes
- Que peut-on dire des polynômes AB et $(A \vee B)(A \wedge B)$?
- Compléter : α est une racine de P ssi divise P
- Donner deux caractérisations de “ α est racine de multiplicité exactement m ” : une avec une relation de divisibilité, une qui fait intervenir P et ses dérivées.
- Donner deux caractérisations de “ α est racine de multiplicité au moins m ” : une avec une relation de divisibilité, une qui fait intervenir P et ses dérivées.
- Quel lien existe-t-il entre le degré d'un polynôme et son nombre de racines (comptées avec multiplicité) ?